Exercice 8

AJUSTEMENT DES PRECIPITATIONS ANNUELLES A LA LOI RACINE NORMALE.

Soient les précipitations annuelles P_{an} enregistrées à la station de Djelfa(170208) sur une période d'observations de 27 années (Tableau 8.1), on demande :

1. Faire l'ajustement des pluies annuelles à loi racine normale (loi de Gauss) ;
2. Calculer les quantiles de période de retour 10, 50 et 100 ans

Données :

Tableau 8.1. Précipitations annuelles (mm)

Année	P_{an} (mm)	Année	P_{an} (mm)
1958/59	325,8	1985/86	169,4
1959/60	377,3	1988/89	162,9
1960/61	258,8	1989/90	215,8
1961/62	258,4	1992/93	94,7
1966/67	192,3	1993/94	64,3
1968/69	240,5	1994/95	243,1
1969/70	548,8	1995/96	207,2
1970/71	259,9	1998/99	115,8
1971/72	422,7	1999/00	123,2
197273	208,8	2000/01	101,3
1978/79	206,1	2001/02	136,2
1979/80	144,8	2003/04	264,4
1980/81	210,1	2006/07	277,6
1983/84	42,3		

***NB** : Seules les années qui n'observent pas de lacunes sont considérées*

Corrigé :

Quelle que soit la série du cumul de la précipitation annuelle à ajuster, il est nécessaire de vérifier son homogénéité par un test approprié, pour éviter toute interprétation fausse par rapport au résultat trouvé.

Rappel :
La fonction de répartition de la loi normale est donnée par l'expression :

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{1}{2}u^2} du \quad \text{(fréquence au non dépassement).}$$

Elle est tabulée en fonction **u** où **u** représente la variable réduite de Gauss.

Dans le cas de la loi racine normale la variable u est égal à :

$$u = \frac{\sqrt{x} - \overline{\sqrt{x}}}{\sigma_{\sqrt{x}}}$$

Avec :

$\overline{\sqrt{x}}$: moyenne arithmétique de la série $x^{0.5}$ et $\sigma_{\sqrt{x}}$: écart type de la série

La transformation $\sqrt{x} = \overline{\sqrt{x}} + \sigma_{\sqrt{x}} \cdot u$ est l'équation de la droite de Henry ajustant les données transformées en racine, à la loi de Gauss.

Procédé :

- calculer les caractéristiques empiriques de l'échantillon à savoir : moyenne, écart type ;

- classer les valeurs de la série par ordre croissant (fréquence au non dépassement) ;

- affecter un numéro d'ordre aux valeurs classées ;

- calculer la fréquence expérimentale par une formule empirique ; pour les lois à 2 paramètres, cas de la loi de Gauss, la formule de Hazen est appliquée F(x) = (m-0,5)/N

- reporter les valeurs $\sqrt{P_{an}}$ sur papier Gauss P_{an} = f[F(x)] ou en absence de papier Gauss, travailler avec la variable réduite **u** et tracer le graphe $\sqrt{P_{an}}$ = f(u) ;

u étant la variable réduite de Gauss égale à $u = \frac{\sqrt{P_{an}} - \overline{\sqrt{P_{an}}}}{\sigma_{\sqrt{P_{an}}}}$ (8.1)

- tracer la droite de Henri ; $\sqrt{P_{an}} = \overline{\sqrt{P_{an}}} + \sigma_{\sqrt{P_{an}}} \cdot u$ (8.2)

1. Ajustement des précipitations annuelles à la loi racine normale

Les caractéristiques de la série pluviométrique initiale sont :

Moyenne = $\overline{P}_{an}$ = 630,10 mm

Ecart type = σ = 193,47 mm

Les caractéristiques de la série pluviométrique transformée en racine sont :

Moyenne = $\overline{\sqrt{P_{an}}}$ = 14,28 mm

Ecart type = $\sigma_{\sqrt{P_{an}}}$ = 3, 74 mm

Le tableau 8.2 résume les résultats.

Tableau 8.2. Calcul de la variable **u**

N° Ordre m	$P_{anClassées}$ (mm)	$\sqrt{P_{an}}$	$u_{théo}$	u_{exp}	N° Ordre m	$P_{anClassées}$ (mm)	$\sqrt{P_{an}}$	$u_{théo}$	u_{exp}
1	42,3	6,50	-2,079	-2,0854	17	210,1	14,49	0,057	0,0930
2	64,3	8,02	-1,674	-1,5932	18	215,8	14,69	0,110	0,1868
3	94,7	9,73	-1,216	-1,3250	19	240,5	15,51	0,328	0,2822
4	101,3	10,06	-1,127	-1,1281	20	243,1	15,59	0,351	0,3803
5	115,8	10,76	-0,941	-0,9674	21	258,4	16,07	0,480	0,4822
6	123,2	11,10	-0,850	-0,8285	22	258,8	16,09	0,483	0,5895
7	136,2	11,67	-0,698	-0,7039	23	259,9	16,12	0,492	0,7039
8	144,8	12,03	-0,601	-0,5895	24	264,4	16,26	0,530	0,8285
9	162,9	12,76	-0,406	-0,4822	25	277,6	16,66	0,636	0,9674
10	169,4	13,02	-0,338	-0,3803	26	325,8	16,66	0,637	1,1281
11	192,3	13,87	-0,110	-0,2822	27	377,3	18,05	1,008	1,3250
12	206,1	14,36	0,020	-0,1868	28	422,7	19,42	1,375	1,5932
13	207,2	14,39	0,031	-0,0930	29	548,8	20,56	1,679	2,0854
14	208,8	14,45	0,045	0,0000	30				

La représentation graphique est en figure 8.1.

La droite de Henry (racine normale) s'écrira :

$$\sqrt{P_{an}} = 14,28 + 3,74\ u \qquad (8.3)$$

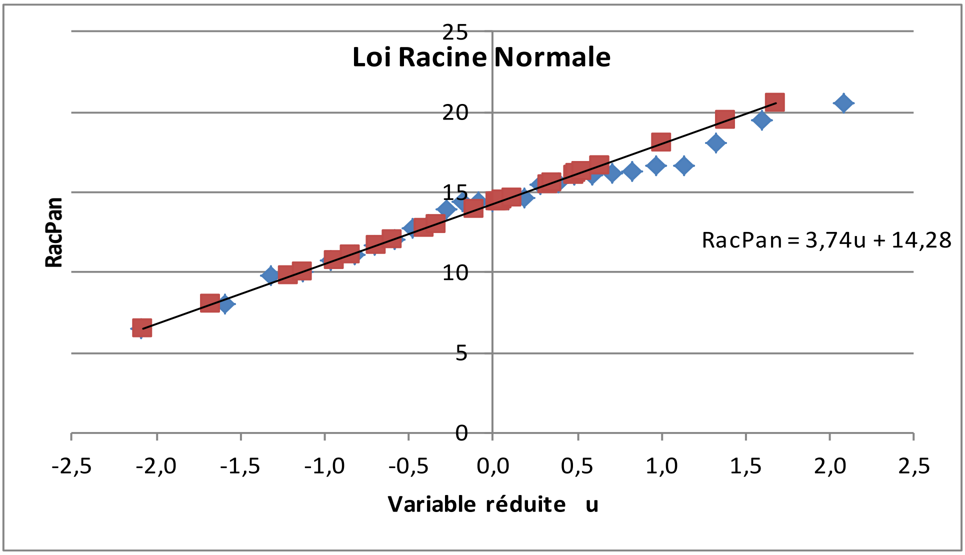

Fig.8.1. Ajustement à la loi Racine normale

2. Calcul des quantiles

Une fois l'adéquation vérifiée, il faut procéder au calcul des quantiles en appliquant l'équation de la droite de Henry (8.3).

Pour T = 10 ans F(x) = 0,10 = 10%

D'où **u** (lue sur la table de Gauss) = 1,28

$\sqrt{P_{an,10\%}} = 19{,}06$ d'où $\mathbf{P_{an,10\%} = 364\ mm}$

Pour T = 50ans F(x) = 0,02 = 2%

D'où **u** (lue sur la table de Gauss) = 2,05

$\sqrt{P_{an,2\%}} = 21{,}95$ d'où $\mathbf{P_{an,2\%} = 452\ mm}$

Pour T = 100ans F(x) = 0,01 = 1%

d'où **u** (lue sur la table de Gauss) = 2,32

$\sqrt{P_{an,1\%}} = 22{,}98$ d'où $\mathbf{P_{an,1\%} = 528\ mm}$

Le même résultat peut être trouvé en utilisant Hydrolab. Le calcul est résumé dans le tableau 8.3 et l'ajustement est donné en figure 8.2.

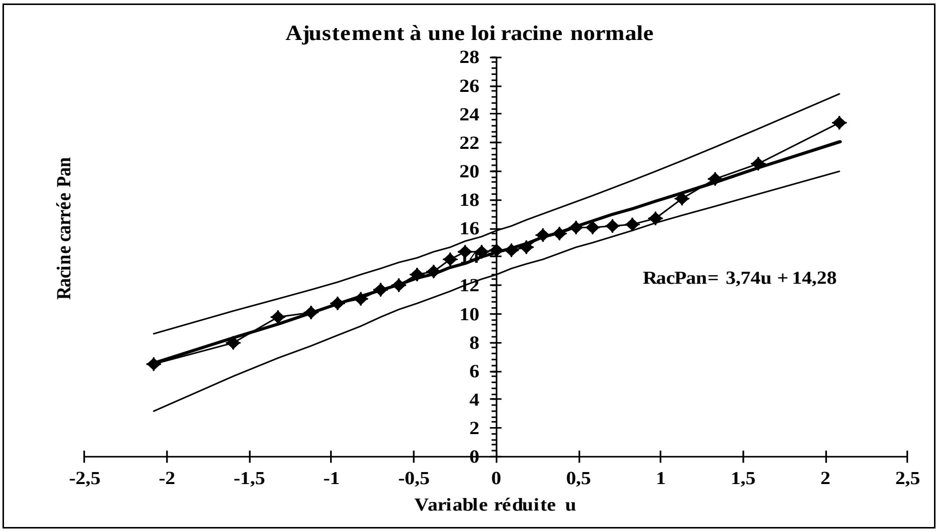

Fig.8.2. Ajustement à la loi racine normale (Hydrolab)

Les quantiles sont présentés dans le tableau 8.3.

Tableau 8.3. Quantiles (Hydrolab)

Période de retour an	Fréquence 1- F(x)	Variable Réduite **u**	Valeur théorique	Borne inférieure	Borne supérieure
10	0,9	1,282	**364**	302,525	461,828
50	0,98	2,05	**482**	394,928	636,335
100	0,99	2,326	**528**	429,489	705,880

<u>On écrira</u> :

$\text{Prob}[P_{an,1,10\%} < P_{an,10\%} < P_{an,2,10\%}] = 1\text{-}\alpha = 95\%$

Soit **:** $\mathbf{Prob[303 < 364 < 461] = 1\text{-}5\% = 95\%}$

$\text{Prob}[P_{an1,2\%} < P_{an,2\%} < P_{an,2,2\%}] = 1\text{-}\alpha = 95\%$

Soit : $\mathbf{Prob[395 < 482 < 636] = 1\text{-}5\% = 95\%}$

$\text{Prob}[P_{an,1,1\%} < P_{an,1\%} < P_{an,2,1\%}] = 1\text{-}\alpha = 95\%$

Soit **:** $\mathbf{Prob[528 < 429 < 706] = 1\text{-}5\% = 95\%}$

Tableau 8.4. Calcul de la variable réduite (Hydrolab)

Moyenne= 14.28		($x^{1/2}$)		I.C(%)=95		
Ecart-type =3,74		($x^{1/2}$)	n=27	u_{Gauss}=1,960		
P_{an} classées	Ordre de classement	Fréquence expérimentale	Variable réduite	Valeur théorique	Borne inférieure	Borne supérieure
42,3	1	0,0185	-2,085	42,113	10,163	73,906
64,3	2	0,0556	-1,593	69,372	31,207	103,215
94,7	3	0,0926	-1,325	87,082	47,230	121,716
101,3	4	0,1296	-1,128	101,354	60,883	136,568
115,8	5	0,1667	-0,967	113,811	73,140	149,582
123,2	6	0,2037	-0,828	125,163	84,479	161,536
136,2	7	0,2407	-0,704	135,797	95,181	172,850
144,8	8	0,2778	-0,589	145,952	105,428	183,787
162,9	9	0,3148	-0,482	155,795	115,347	194,533
169,4	10	0,3519	-0,380	165,451	125,038	205,228
192,3	11	0,3889	-0,282	175,020	134,580	215,990
206,1	12	0,4259	-0,187	184,589	144,042	226,924
207,2	13	0,4630	-0,093	194,237	153,489	238,131
208,8	14	0,5000	0,000	204,045	162,984	249,715
210,1	15	0,5370	0,093	214,094	172,590	261,785
215,8	16	0,5741	0,187	224,476	182,382	274,469
240,5	17	0,6111	0,282	235,296	192,440	287,913
243,1	18	0,6481	0,380	246,681	202,866	302,302
258,4	19	0,6852	0,482	258,794	213,784	317,869
258,8	20	0,7222	0,589	271,848	225,362	334,929
259,9	21	0,7593	0,704	286,140	237,826	353,920
264,4	22	0,7963	0,828	302,107	251,513	375,491
277,6	23	0,8333	0,967	320,433	266,946	400,668
325,8	24	0,8704	1,128	342,302	285,023	431,231
377,3	25	0,9074	1,325	370,066	307,524	470,736
422,7	26	0,9444	1,593	409,652	338,905	528,197
548,8	27	0,9815	2,085	487,502	398,880	644,190

NB : Il est à noter que, lorsque le cumul annuel n'est pas important, la loi normale ne s'ajuste pas à l'encontre de la loi racine normale qui donne un meilleur résultat. C'est le cas de cette station prise comme exemple comme le montre la figure 8.3.

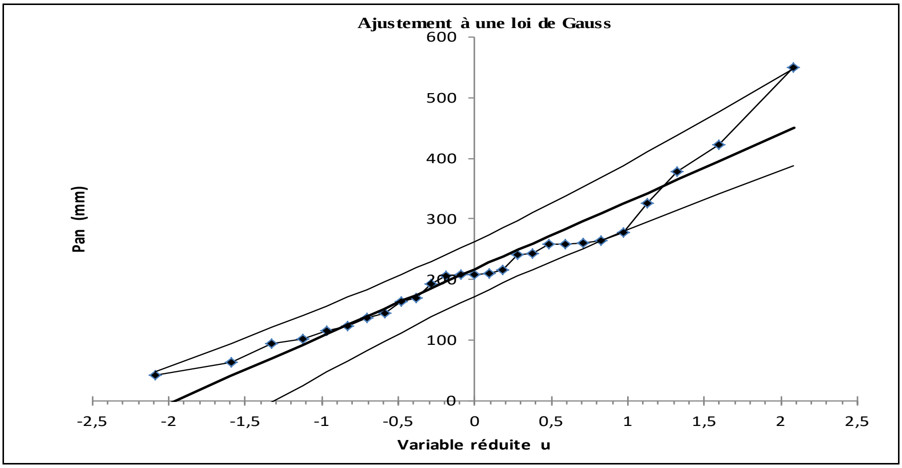

Fig.8.3. Exemple de non ajustement à la loi normale

&&&&&