Exercice 7

AJUSTEMENT DES PRECIPITATIONS ANNUELLES A LA LOI LOG NORMALE

Soient les précipitations annuelles P_{an} enregistrées à la station de Djelfa(170208) sur une période d'observations de 27 années (Tab.7.1), on demande de :

1. Faire l'ajustement des pluies annuelles à loi log normale (loi de Galton) ;
2. Calculer les quantiles de période de retour 10, 50 et 100 ans

Données

Tableau 7.1. Précipitations annuelles

Année	P_{an} (mm)	Année	P_{an} (mm)
1958/59	325,8	1985/86	169,4
1959/60	377,3	1988/89	162,9
1960/61	258,8	1989/90	215,8
1961/62	258,4	1992/93	94,7
1966/67	192,3	1993/94	64,3
1968/69	240,5	1994/95	243,1
1969/70	548,8	1995/96	207,2
1970/71	259,9	1998/99	115,8
1971/72	422,7	1999/00	123,2
197273	208,8	2000/01	101,3
1978/79	206,1	2001/02	136,2
1979/80	144,8	2003/04	264,4
1980/81	210,1	2006/07	277,6
1983/84	42,3		

***NB** : Seules les années qui n'observent pas de lacunes sont considérées*

Corrigé :

Quelle que soit la série du cumul de la pluie annuelle à ajuster, il est nécessaire de vérifier son homogénéité par un test approprié, pour éviter toute interprétation fausse par rapport au résultat trouvé.

Rappel : La fonction de répartition de la loi log normale est donnée par l'expression

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{1}{2}u^2} du \quad (\textit{fréquence au non dépassement}). \quad (7.1)$$

Elle est tabulée en fonction (**u**) où (**u**) représente la variable réduite de Gauss. Dans le cas de la loi log normale la variable **u** est égale à :

$$\mathbf{u} = \frac{\ln x - \overline{\ln x}}{\sigma_{\ln}} \quad (7.2)$$

Avec :

$\overline{\ln x}$: moyenne arithmétique de la série des valeurs initiales transformées en logarithme ;

$\sigma_{\ln}$: écart type de la série transformée en logarithme.

La transformation $\ln x = \overline{\ln x} + \sigma_{\ln} . u$ est l'équation de la droite de Galton ajustant les données transformées en logarithme, à la loi log normale.

Procédé :

- calculer les caractéristiques empiriques de la série initiale et de la série transformée en logarithme, à savoir : moyenne, écart type ;
- classer les valeurs de la série par ordre croissant (fréquence au non dépassement) ou croissant (fréquence au dépassement) ;
- affecter un numéro d'ordre aux valeurs classées ;
- calculer la fréquence expérimentale par une formule empirique ; pour les lois à 2 paramètres, cas de la loi de Gauss, la formule de Hazen est appliquée F(x) = (m-0,5)/n
- reporter les valeurs P_{an} sur papier Galton P_{an}=f[F(x)] ou en absence de papier Galton, travailler avec la variable réduite **u** et tracer le graphe LnP_{an} = f(u) ; u étant la variable réduite u qui est égale à u= $\frac{\ln P_{an} - \overline{\ln P_{an}}}{\sigma_{\ln Pan}}$
- tracer la droite de Galton ; $\ln P_{an} = \overline{\ln P_{an}} + \sigma_{\ln Pan} . u$ (7.3)

1. **Ajustement des précipitations annuelles à la loi log normale (loi de Galton)**

Les caractéristiques de la série pluviométrique initiale sont :

Moyenne = $\overline{P}_{an}$ = 217,5 mm
Ecart type = σ = 111,19 mm

Les caractéristiques de la série pluviométrique transformée en logarithme sont :

$\overline{\ln P_{an}}$ = 5,25 mm

$\sigma_{\ln Pan}$ = 0,56 mm

Le tableau 7.2 résume les résultats.

La représentation graphique est en figure 7.1

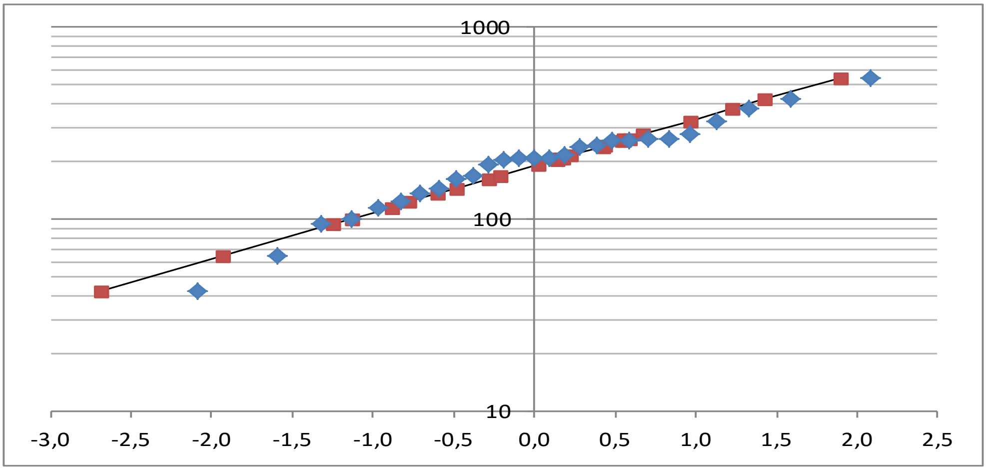

Fig.7.1. Ajustement à la loi log normale

L'équation de la droite de Galton est donnée par l'expression

$$\ln P_{an} = \overline{\ln P_{an}} + \sigma_{\ln Pan} \cdot u = 5{,}25 + 0{,}56\,u \qquad (7.4)$$

D'où ; $$\mathbf{P_{an} = e^{(5,25 + 0,56\,u)}} \qquad (7.5)$$

Tableau 7.2. Calcul de la variable **u**

N° Ordre m	$P_{anClassées}$ (mm)	lnP_{an}	**F(x)**	$\mathbf{u_{théo}}$	$\mathbf{u_{exp}}$
1	42,3	3,74	5,35	-2,688	-2,085
2	64,3	4,16	5,37	-1,940	-1,593
3	94,7	4,55	5,48	-1,249	-1,325
4	101,3	4,62	5,49	-1,128	-1,128
5	115,8	4,75	5,55	-0,890	-0,967
6	123,2	4,81	5,56	-0,779	-0,828
7	136,2	4,91	5,56	-0,600	-0,704
8	144,8	4,98	5,58	-0,490	-0,589
9	162,9	5,09	5,63	-0,280	-0,482
10	169,4	5,13	5,79	-0,210	-0,380
11	192,3	5,26	5,93	0,016	-0,282
12	206,1	5,33	6,05	0,140	-0,187
13	207,2	5,33	6,31	0,149	-0,093
14	208,8	5,34	5,35	0,163	0,000
15	210,1	5,35	0,537	0,174	0,093
16	215,8	5,37	0,574	0,222	0,187
17	240,5	5,48	0,611	0,416	0,282
18	243,1	5,49	0,648	0,435	0,380
19	258,4	5,55	0,685	0,544	0,482
20	258,8	5,56	0,722	0,547	0,589
21	259,9	5,56	0,759	0,554	0,704
22	264,4	5,58	0,796	0,585	0,828
23	277,6	5,63	0,833	0,672	0,967
24	325,8	5,79	0,870	0,958	1,128
25	377,3	5,93	0,907	1,220	1,325
26	422,7	6,05	0,944	1,423	1,593
27	548,8	6,31	0,981	1,889	2,085

2. Calcul des quantiles

Une fois l’adéquation vérifiée, il faut procéder au calcul des quantiles en appliquant l’équation de la droite de Galton, soit :

$$\ln P_{an} = \overline{\ln P_{an}} + \sigma_{\ln Pan} \cdot u \qquad (7.6)$$

Pour :
T = 10 ans F(x) = 0,10 = 10% d'où **u** (lue sur la table de Gauss) = 1,28

lnP_{an} = 5,25 + 0,56*u =5,9668

Soit : $P_{an,10\%}$= **390 mm**

T = 50 ans F(x) = 0,02 = 2% d'où **u** (lue sur la table de Gauss)= 2,05

$lnP_{an,2\%}$ = 5,25 + 0,56*u = 6,398

Soit : $P_{an,0,1\%}$ = e^ 6,398 = **601 mm**

T = 100ans F(x) = 0,01 = 1% d'où **u** (lue sur la table de Gauss)= 2,32

$LnP_{an,1\%}$= 5,25+0,56*u= 6,55

Soit : $Pa_{n,1\%}$ = e^6,5548= **702 mm**

NB : Les intervalles de confiance sont plus simples à calculer avec Hydrolab.

Le même résultat peut être trouvé en utilisant Hydrolab. L'ajustement est donné en figure 7.2 et le calcul est résumé dans le tableau 7.3.

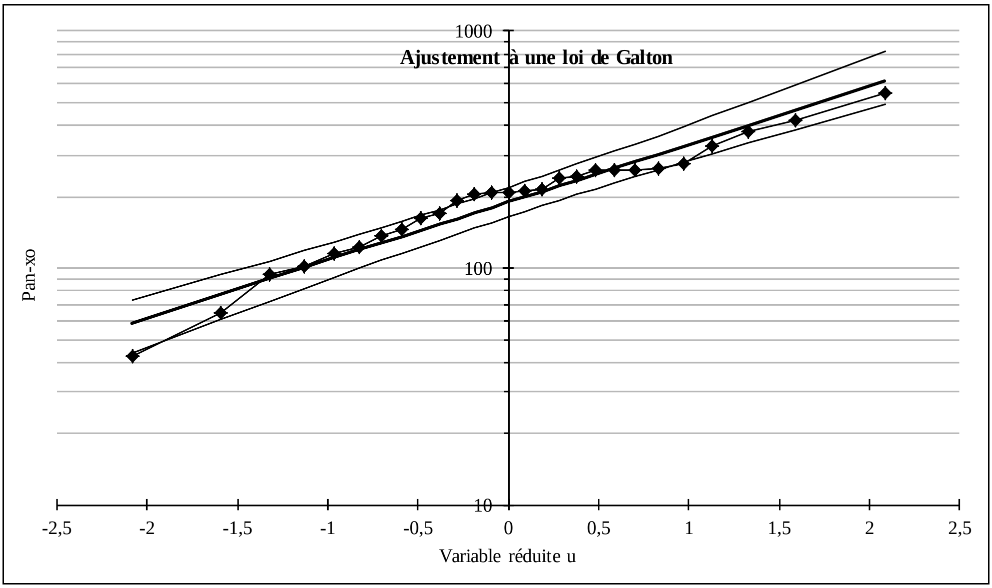

Fig.7.2. Ajustement à la loi log normale (Hydrolab2016)

Tableau 7.3. Calculs pour la loi log normale

Moyenne de $\ln(x-x_o)$ =5,25	Seuil x_o=0	I.C. =95%
Ecart-type de $\ln(x-x_o)$=0,56	u Gauss = 1,96	

Valeurs classées	Ordre de classement	Fréquence expérimentale	Variable réduite	Valeur théorique	Borne inférieure	Borne supérieure
42,3	1	0,0185	-2,085	58,904519	35,87227253	80,8428536
64,3	2	0,0556	-1,593	77,654354	51,43165771	102,23221
94,7	3	0,0926	-1,325	90,27896	62,39306066	116,558547
101,3	4	0,1296	-1,128	100,82855	71,75168588	128,586109
115,8	5	0,1667	-0,967	110,35163	80,30168269	139,539004
123,2	6	0,2037	-0,828	119,30705	88,39341488	149,956643
136,2	7	0,2407	-0,704	127,94942	96,22108731	160,144487
144,8	8	0,2778	-0,589	136,44358	103,9093017	170,30726
162,9	9	0,3148	-0,482	144,90981	111,5475315	180,601609
169,4	10	0,3519	-0,380	153,4453	119,2065747	191,161416
192,3	11	0,3889	-0,282	162,13602	126,9476226	202,112196
206,1	12	0,4259	-0,187	171,06427	134,8280115	213,580889
207,2	13	0,4630	-0,093	180,31442	142,9054782	225,703941
208,8	14	0,5000	0,000	189,97807	151,241891	238,635375
210,1	15	0,5370	0,093	200,15962	159,9071119	252,556206
215,8	16	0,5741	0,187	210,98307	168,9835898	267,686699
240,5	17	0,6111	0,282	222,60115	178,5724272	284,303594
243,1	18	0,6481	0,380	235,20867	188,8020409	302,765728
258,4	19	0,6852	0,482	249,06296	199,8413284	323,554138
258,8	20	0,7222	0,589	264,51714	211,9208864	347,338158
259,9	21	0,7593	0,704	282,0776	225,3693902	375,091016
264,4	22	0,7963	0,828	302,51075	240,6806704	408,307174
277,6	23	0,8333	0,967	327,06056	258,6492975	449,450923
325,8	24	0,8704	1,128	357,95086	280,6809039	503,007908
377,3	25	0,9074	1,325	399,77937	309,6440919	578,456402
422,7	26	0,9444	1,593	464,77324	353,0361452	701,740271
548,8	27	0,9815	2,085	612,71471	446,4422492	1006,11595

3. **Quantiles (Hydrolab2016)**

Les quantiles sont présentés dans le tableau 7.4.

Tableau 7.4. Quantiles (mm) **(Hydrolab)**

Période Retour (an)	Fréquence 1-F(x)	Variable Réduite u	P_{an} (mm)	$P_{an,p\%,1}$ (mm)	$P_{an,p\%,2}$ (mm)
10	0,9	1,28	**390**	303	561
50	0,98	2,05	**601**	440	983
100	0,99	2,33	**702**	500	1203

On écrira :

Prob $[P_{an,1,10\%} < P_{an,10\%} < P_{an,2,10\%}] = 1-\alpha = 95\%$

Soit Prob[303mm<390mm<561mm] = 1-5% = 95%

Prob $[P_{an,2\%} < P_{an,0.1\%} < P_{an,2,2\%}] = 1-\alpha = 95\%$

Soit Prob[440mm<602 mm<983mm] = 1-5% = 95%

Prob $[P_{an,1,1\%} < P_{an,1\%} < P_{an,2,1\%}] = 1-\alpha = 95\%$

Soit Prob[500mm<702mm<1203mm] = 1-5% = 95%

&&&&&