Exercice 11

AJUSTEMENT DES DEBITS MOYENS ANNUELS A LA LOI DE PEARSON III.

Soit la série des débits moyens annuels enregistrés à la station Chouly (160601) dans le bassin versant de la Tafna sur une période d'observation de 40 ans, on demande de :

1. Faire l'ajustement à la loi Pearson III.
2. Déterminer les quantiles de période de retour 10, 50, 100 ans et leurs intervalles de confiance pour un seuil $\alpha = 5\%$.

Données

Tableau 11.1. Débits moyens annuels

Année	Débit (m^3/s)	Année	Débit (m^3/s)
1967/68	0,184	1987/88	0,514
1968/69	0,475	1988/89	0,062
1969/70	0,275	1989/90	0,100
1970/71	0,405	1990/91	0,051
1971/72	0,344	1991/92	0,476
1972/73	0,743	1992/93	0,180
1973/74	0,900	1993/94	0,067
1974/75	0,897	1994/95	0,080
1975/76	0,595	1995/96	0,200
1976/77	0,488	1996/97	0,378
1977/78	0,354	1997/98	0,060
1978/79	0,306	1998/99	0,088
1979/80	0,301	1999/2000	0,084
1980/81	0,421	2000/01	0,058
1981/82	0,394	2001/02	0,275
1982/83	0,105	2002/03	0,097
1983/84	0,111	2003/04	0,234
1984/85	0,062	2004/05/	0,127
1985/86	0,070	2005/06	0,079
1986/87	0,302	2006/07	0,055

Corrigé :

Tout d'abord, il est à noter que la loi Pearson III donne de très bons résultats pour l'ajustement des débits moyens annuels en Algérie du Nord.

La loi Pearson III est une loi à 3 paramètres. Sa forme standardisée est une transformation linéaire de la fonction Gamma. Sa fonction de répartition est donnée par l'expression 11.1.

$$F(t)=K\int_t^{\infty} e^{\lambda t}(x+\sqrt{\lambda})^{\lambda-1}dt \qquad (11.1)$$

Avec :

$$K=\frac{e^{-\lambda}\sqrt{\lambda}^{\lambda}}{\gamma(\lambda)} \qquad (11.2)$$

$\gamma(\lambda)$: Fonction gamma
λ : Paramètre de forme

t est la variable réduite ayant pour expression :

$$\mathbf{t}=\frac{x_i-\bar{x}}{\sigma}=\frac{K_i-1}{C_v} \quad \text{avec} \quad \mathbf{K_i}=\frac{X_i}{\bar{X}} \qquad (11.3)$$

σ : Écart type de la série
$\bar{x}$: Moyenne arithmétique de la série
K_i : Hydraulicité ou coefficient modulaire de Kotchérine

Il existe 2 manières de procéder à l'ajustement et de calculer les quantiles.

- ✓ **1er Procédé (utilisation de la table de Rybkine Foster)**

La variable **t** n'est en fait que la fonction Rybkine Foster $\mathbf{F_{p\%}}$ qui est tabulée, dépendante du coefficient de variation $\mathbf{C_v}$, du coefficient d'asymétrie **Cs** et de la probabilité **P%**.

$$\mathbf{t = F_{p\%}} = \frac{K_{p\%}-1}{C_v} \qquad 11.4)$$

D'où :

$$\mathbf{K_{p\%} = F_{p\%}\, C_v + 1} \qquad (11.5)$$

Le quantile $\mathbf{Q_{p\%}}$ peut être calculé par l'expression (11.6) ou bien lu directement sur le graphique d'ajustement de la loi.

$$\mathbf{Q_{p\%} = K_{p\%}\, Q_o = (F_{p\%} C_v + 1)\, Q_o} \qquad (11.6)$$

Où :

$$Q_o = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} Q_i \right) \text{ : Débit moyen interannuel} \qquad (11.7)$$

N : Taille de la série

$$C_v = \left(\frac{\sigma}{Q_o} \right) \text{ : Coefficient de variation} \qquad (11.8)$$

$$\sigma = \left(\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \right) \text{ : Ecart type = Racine carré de la variance}$$

$$C_s = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} (Q_i - Q_o)^3}{N \sigma^3} \right) \text{ pour N> 30 : Coefficient d'asymétrie} \quad (11.9)$$

Ajustement à la loi Pearson III (Méthode classique).

-Calcul des caractéristiques empiriques de la série Q_o, C_v et C_s (Tableau 11.2).

Tableau 11.2. Caractéristiques de la série (N=40)

Q_o	0,28	C_v	0,83
Ecart type	0,23	C_s	1,21

- Classer les valeurs par ordre croissant en leur affectant un numéro d'ordre m **;**
- Calcul de la fréquence expérimentale F(x) en utilisant la formule de Tchegadayer pour les lois non normales (Tableau 11.3).

$$F(x) = \frac{m - 0.3}{N + 0.4} \qquad \text{si} \qquad C_s \geq 2\, C_v \qquad (11.10)$$

$$F(x) = \frac{m - 0.4}{N + 0.2} \qquad \text{si} \qquad C_s < 2\, C_v \qquad (11.11)$$

C_s étant inférieur à $2C_v$, l'expression 11.11 est utilisée.

Tableau 11.3. Calcul de la fréquence expérimentale

N° ordre m	Débits classés	F(x)	N° ordre m	Débits classés	F(x)
1	0,051	0,015	21	0,234	0,512
2	0,055	0,040	22	0,275	0,537
3	0,058	0,065	23	0,275	0,562
4	0,060	0,090	24	0,301	0,587
5	0,062	0,114	25	0,302	0,612
6	0,062	0,139	26	0,306	0,637
7	0,067	0,164	27	0,344	0,662
8	0,070	0,189	28	0,354	0,687
9	0,079	0,214	29	0,378	0,711
10	0,080	0,239	30	0,394	0,736
11	0,084	0,264	31	0,405	0,761
12	0,088	0,289	32	0,421	0,786
13	0,097	0,313	33	0,475	0,811
14	0,100	0,338	34	0,476	0,836
15	0,105	0,363	35	0,488	0,861
16	0,111	0,388	36	0,514	0,886
17	0,127	0,413	37	0,595	0,910
18	0,180	0,438	38	0,743	0,935
19	0,184	0,463	39	0,897	0,960
20	0,200	0,488	40	0,900	0,985

- Reporter sur un même graphique (papier Gauss) la variable Q_i en fonction e F(x) et $_i$ en fonction de $F_{p\%}$ ($F_{p\%}$ étant la Fonction Rybkine Foster tabulée pour différentes probabilités et diverses coefficients d'asymétrie C_s). En utilisant la table de Rybkine Foster, déterminer pour diverses probabilités $Fp_{\%}$, les quantiles pour un C_s calculé.

Ce calcul nécessite différentes tables de Rybkine Foster pour différentes valeurs de la relation qui existe entre le coefficient d'asymétrie C_s et le coefficient de variation C_v et ce, pour différentes valeurs de la probabilité.

A cet effet, vu la lourdeur du calcul, au lieu d'utiliser les tables et de travailler avec les fréquences, on utilisera le tableur Excel pour calculer la variable réduite et les débits théoriques afin de faire l'ajustement.

- ✓ **2ème Procédé (sans utilisation de la table de Rybkine Foster)**

Cette 2ème manière de faire ne nécessite pas de tables de la fonction de Rybkine Foster, d'autant plus que les tables sont nombreuses et dépendent de la relation qui existe entre le coefficient d'asymétrie et le coefficient de variation (C_s= a C_v).

En se basant sur les paramètres qui rentrent dans la loi Gamma (calculés sous Excel), on peut procéder à l'ajustement.

Le tableau 11. 4. donne les calculs de $\mathbf{u_{Gauss}}$ et $\mathbf{Q_{Théo}}$

Tableau 11.4. Calcul du débit théorique (m^3/s)

Ordre	F_{exp}	**u** Gauss	Q_{Exp} (m^3/s)	$Q_{Théo}$(m^3/s)
1	0,013	-2,241	0,051	0,011
2	0,038	-1,780	0,055	0,025
3	0,063	-1,534	0,058	0,036
4	0,088	-1,356	0,060	0,046
5	0,113	-1,213	0,062	0,056
6	0,138	-1,092	0,062	0,066
7	0,163	-0,984	0,067	0,075
8	0,188	-0,887	0,070	0,085
9	0,213	-0,798	0,079	0,094
10	0,238	-0,714	0,080	0,104
11	0,263	-0,636	0,084	0,113
12	0,288	-0,561	0,088	0,123
13	0,313	-0,489	0,097	0,133
14	0,338	-0,419	0,100	0,143
15	0,363	-0,352	0,105	0,153
16	0,388	-0,286	0,111	0,163
17	0,413	-0,221	0,127	0,174
18	0,438	-0,157	0,180	0,185
19	0,463	-0,094	0,184	0,197
20	0,488	-0,031	0,200	0,209
21	0,513	0,031	0,234	0,221
22	0,538	0,094	0,275	0,234
23	0,563	0,157	0,275	0,247
24	0,588	0,221	0,301	0,261
25	0,613	0,286	0,302	0,276
26	0,638	0,352	0,306	0,292
27	0,663	0,419	0,344	0,309
28	0,688	0,489	0,354	0,326
29	0,713	0,561	0,378	0,345

30	0,738	0,636	0,394	0,366
31	0,763	0,714	0,405	0,389
32	0,788	0,798	0,421	0,414
33	0,813	0,887	0,475	0,441
34	0,838	0,984	0,476	0,473
35	0,863	1,092	0,488	0,509
36	0,888	1,213	0,514	0,553
37	0,913	1,356	0,595	0,607
38	0,938	1,534	0,743	0,678
39	0,963	1,780	0,897	0,785
40	0,988	2,241	0,900	1,012

- u_{Gauss} : variable réduite de Gauss. Elle est déterminée sur Excel (loi Normale.Standard.Inverse.N(F_{exp}), de paramètres γ et **s** qui dépendent des caractéristiques empiriques de la série : la moyenne $\overline{X}$, l'écart type σ ou la variance σ^2 ou le coefficient de variation C_v).

$$\gamma = \frac{\sigma^2}{\overline{X}^2} = \frac{1}{C_v^{\,2}} \qquad \text{et} \qquad s = \frac{\sigma^2}{\overline{X}}$$

Caractéristiques calculées

$\overline{X} = 0{,}275$
$\sigma = 0{,}229$
$C_v = 0{,}83$
$\gamma = 1{,}446$ (paramètre de forme)
$s = 0{,}190$ (paramètre d'échelle)

- F_{exp} : Fréquence expérimentale (formule de Hazen) = (m-0,5)/n
- Q_{Exp} : Débit moyen annuel observé
- $Q_{Théo}$: Débit moyen annuel théorique qui permettra de tracer la courbe théorique en fonction de u_{Gauss}. Il est déterminé sous Excel (Loi.Gamma.Inverse.N(F_{exp} ; γ; s).

L'ajustement est donné en Figure 11. 1.

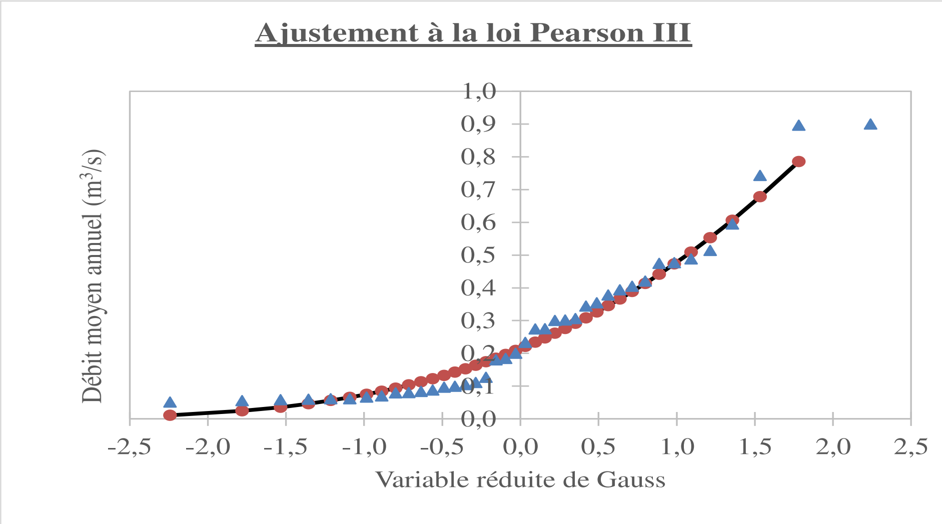

Fig.11.1. Ajustement des débits moyens annuels à la loi Pearson III

Les débits probables pour une période de retour dépendent de la loi Gamma inverse et ses paramètres (ɣ; s). Ils sont déterminés directement sur le tableur Excel.

Le quantile $Q_{p\%}$ est le débit moyen annuel pour une période de retour T et une probabilité p% est donné par la Loi.Gamma.Inverse.N(F_{exp} ; ɣ; s).

Les quantiles sont donnés en tableau 11.5.

Tableau 11.5. Quantiles

Période de retour	F(x)	$Q_{p\%}$ (m^3/s)
10 ans	F(x)=0,9	0,578
50 ans	F(x)=0,98	0,915
100 ans	F(x)=0,99	1,057

$Q_{p\%}$ est déterminé en passant par la (Loi.Gamma.Inverse.N(F_{exp} ; ɣ; s) sous Excel.

Le calcul des intervalles de confiance est fastidieux autant le faire avec Hydrolab.

Ajustement à la loi Pearson III(Utilisation d'Hydrolab)

L'utilisation d'hydrolab facilite le calcul, le tracé de l'ajustement et les intervalles de confiance comme le montre le tableau 11.6 et la figure 11.2.

Tableau 11.6. Calcul (Hydrolab)

Moyenne =0,274921053 Coef de Var =0,831578066		Paramètre de forme= 1,45 Paramètre d'échelle=0,19 N =40			% U Anderson =0,195 I.C. à (en%)= 95 u Gauss= 1,960	
Valeurs classées	Ordre de classement	Fréquence expérimentale	Variable réduite	Valeur théorique	Borne inférieure	Borne supérieure
0,051174664	1	0,0125	-2,241	0,011160914	0,003489961	0,044927676
0,055465022	2	0,0375	-1,780	0,024547155	0,010224865	0,067377316
0,058452527	3	0,0625	-1,534	0,035785859	0,016946835	0,082112669
0,05968486	4	0,0875	-1,356	0,046152357	0,023774181	0,094920104
0,061516992	5	0,1125	-1,213	0,056055798	0,030665326	0,106563127
0,061702511	6	0,1375	-1,092	0,065696832	0,037633618	0,118369428
0,066658494	7	0,1625	-0,984	0,075195191	0,044785388	0,12889778
0,07007271	8	0,1875	-0,887	0,084631762	0,052146516	0,13837266
0,07916809	9	0,2125	-0,798	0,094066383	0,059636344	0,148253909
0,080353825	10	0,2375	-0,714	0,103546649	0,067257746	0,158898458
0,083806852	11	0,2625	-0,636	0,113112776	0,075132113	0,169148829
0,088373251	12	0,2875	-0,561	0,122800545	0,083283926	0,179056635
0,096832705	13	0,3125	-0,489	0,132643241	0,091556409	0,189494467
0,09960049	14	0,3375	-0,419	0,142673016	0,099945577	0,200637974
0,10460721	15	0,3625	-0,352	0,152921951	0,108652124	0,211733733
0,111337279	16	0,3875	-0,286	0,163422942	0,11770705	0,222810718
0,126779099	17	0,4125	-0,221	0,174210507	0,126953518	0,234504428
0,180404884	18	0,4375	-0,157	0,18532159	0,13639718	0,246943674
0,184306982	19	0,4625	-0,094	0,196796404	0,14625844	0,25958739
0,199997128	20	0,4875	-0,031	0,208679385	0,156582203	0,272471984
0,233760272	21	0,5125	0,031	0,221020299	0,167192758	0,286359396
0,274720523	22	0,5375	0,094	0,23387558	0,17810857	0,301421317
0,275361292	23	0,5625	0,157	0,247309997	0,189606839	0,317040455
0,300605841	24	0,5875	0,221	0,261398767	0,201761277	0,333291774
0,301581525	25	0,6125	0,286	0,276230298	0,214238378	0,351041417
0,305831577	26	0,6375	0,352	0,291909817	0,227058004	0,370549128
0,34441139	27	0,6625	0,419	0,308564271	0,240725519	0,391237572
0,354463876	28	0,6875	0,489	0,326349089	0,25537647	0,413294754
0,377818465	29	0,7125	0,561	0,345457748	0,270685646	0,437686964
0,394256314	30	0,7375	0,636	0,366135665	0,286745506	0,464892128
0,404806783	31	0,7625	0,714	0,388701032	0,304259152	0,494666301
0,420751478	32	0,7875	0,798	0,413577225	0,323552145	0,527589536
0,474757097	33	0,8125	0,887	0,441345509	0,344392833	0,565142415

0,47642939	34	0,8375	0,984	0,472835545	0,36717696	0,60870923
0,488111108	35	0,8625	1,092	0,509291804	0,393356299	0,659506064
0,514067936	36	0,8875	1,213	0,552708157	0,424268581	0,720481743
0,595075574	37	0,9125	1,356	0,606587884	0,462054296	0,797028755
0,743265151	38	0,9375	1,534	0,678009116	0,511243339	0,899880928
0,896599797	39	0,9625	1,780	0,785190041	0,583030756	1,056926694
0,899871147	40	0,9875	2,241	1,012042547	0,728550548	1,398241799

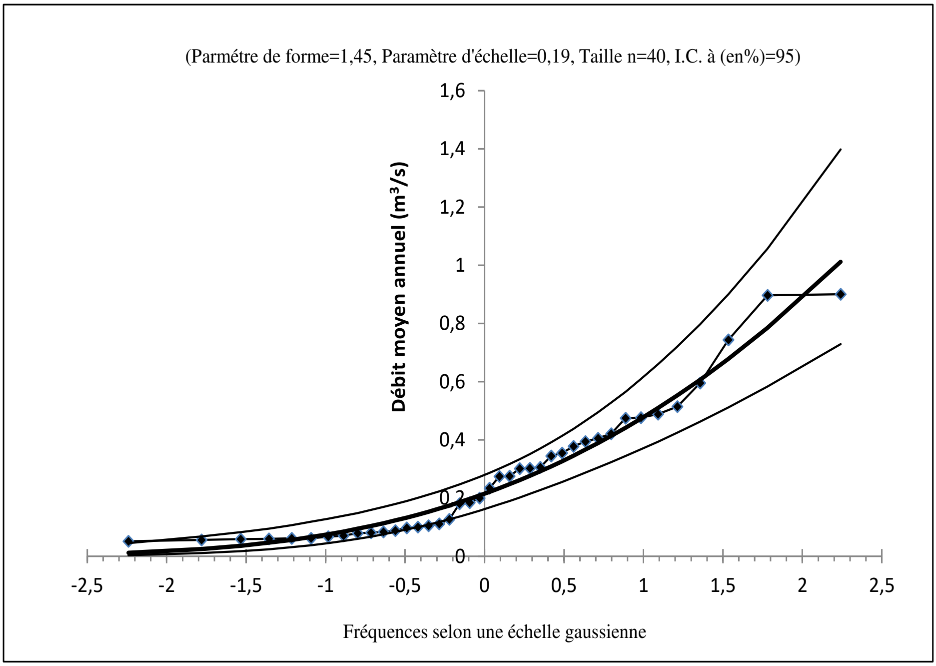

Fig. 11.2. Ajustement à la loi PearsonIII (Hydrolab)

Les quantiles sont donnés dans le tableau 11.6

Tableau 11. 6. Calcul des quantiles (Hydrolab)

Période retour	Fréquence	$u_{théo}$	$Q_{p\%}$ (m^3/s)	$Q_{1,,10\%}$ (m^3/s)	$Q_{2,10\%}$ (m^3/s)
10 ans	0,9	1,282	0,5780	0,442	0,756
50 ans	0,98	2,054	0,9155	0,667	1,252
100 ans	0,99	2,326	1,0577	0,757	1,468

On écrira :

Les intervalles des débits moyens (m^3/s) probables sont :

T=10 ans :

Prob [$Q_{1,10\%} < Q_{10\%} < Q_{2,10\%}$] $= 1-\alpha = 95\%$

Soit Prob[0,44 <0,58 < 0,76] = 1-5% = 95%

T=50 ans

Prob [$Q_{1,2\%} < Q_{2\%} < Q_{2,2\%}$] $= 1-\alpha = 95\%$

Soit Prob[0,67 <0,92< 1,27] = 1-5% = 95%

T=100 ans

Prob [$Q_{1,1\%} < Q_{m1\%} < Q_{2,1\%}$] $= 1-\alpha = 95\%$

Soit Prob[0,76<1,06< 1,47] = 1-5% = 95%

&&&&&