Exercice 9

AJUSTEMENT DES PRECIPITATIONS MAXIMALES JOURNALIERES A LA LOI DE GUMBEL.

Soient les précipitations maximales journalière $P_{max,j}$ enregistrées à la station de Ouled Mimoun dans la wilaya de Tlemcen, observée sur une période de 64 ans, on demande :

1. Faire l'ajustement des précipitations maximales journalières à loi de Gumbel (loi doublement exponentielle) ;
2. Calculer les quantiles de période de retour 10, 50 et 100 ans
3. Déterminez leur intervalle de confiance pour 1-α = 95%

Données

Tableau 9.1. Précipitations maximales journalières ($P_{max,j}$)

Année	$P_{max,j}$ (mm)	Année	$P_{max,j}$ (mm)	Année	$P_{max,j}$ (mm)
1924/25	75,5	1946/47	56,5	1985/86	35,5
1925/26	30,2	1947/48	42,7	1986/87	31,8
1926/27	25	1948/49	66,9	1987/88	16,4
1927/28	52	1949/50	45,1	1988/89	45,4
1928/29	60	1950/51	59,5	1989/90	18,7
1929/30	35,6	1951/52	42,4	1990/91	51,8
1930/31	32,5	1952/53	24,5	1992/93	48,4
1931/32	28,5	1953/54	52,5	1994/95	32,3
1932/33	36	1954/55	51,9	1995/96	25,4
1933/34	35,8	1955/56	21	1997/98	18,6
1934/35	43	1956/57	57	1998/99	29,5
1935/36	48	1957/58	39	1999/00	35,8
1936/37	55	1958/59	54,3	2001/02	49,7
1937/38	35	1959/60	20	2002/03	29,1
1938/39	52,9	1960/61	30,4	2003/04	32,5
1939/40	39,3	1961/62	45,3	2005/06	22,8
1940/41	34,9	1979/80	74	2006/07	28,2
1941/42	36,3	1980/81	41,8	2007/08	33,7
1942/43	32,5	1982/83	25,8	2008/09	41,4
1943/44	54,2	1983/84	29,7	2009/10	37,5
1944/45	43,3	1984/85	33,8	2010/11	34
1945/46	31,4				

***NB**: Seules les années qui n'observent pas de lacunes sont considérées*

Rappel

La fonction de répartition de la loi de Gumbel ou loi doublement exponentiel est :

$$F(x) = e^{-e^{-y}} \quad \text{et} \quad y = \alpha\,(x - x_o) \qquad (9.1)$$

F(x) : fréquence au dépassement de la valeur de *x*

α, x_o : coefficients d'ajustement

x_o : paramètre de position (mode)

α : paramètre d'échelle différent de zéro

Par un changement de variable $y = \alpha\,(x - x_o)$,la loi de Gumbel s'écrit :

$$F(x) = e^{-e^{-y}} \qquad (9.2)$$

Avec, $y = \alpha\,(x - x_o)$, est la variable réduite de Gumbel

L'équation $y = \alpha\,(x - x_o)$, présentée sous la forme $x = \frac{1}{\alpha}\,y + x_o$ est l'équation d'une droite qui représente la loi de Gumbel sur une échelle Gumbelienne.

Ce papier porte en abscisse une échelle arithmétique de la variable réduite **y**. L'ordonnée représente une échelle arithmétique de la variable étudiée soit $P_{max,j}$ et l'abscisse est une échelle arithmétique de la variable de Gumbel **y**.

<u>Procédé d'ajustement</u>

- classement des valeurs par ordre croissant en leur affectant un numéro d'ordre ;
- calculer la fréquence expérimentale par la formule de Hazen :

$$F(x) = (m-0.5)/n \; ; \qquad (9.3)$$

- calculer les caractéristiques empiriques de la série ;
- calculer la variable de Gumbel pour chaque valeur observée ;

$$y = -\,[\ln - \ln F(x)] \qquad (9.4)$$

- reporter les valeurs observées sur papier à échelle Gumbelienne ;
- calculer le coefficient de corrélation entre les valeurs observées et la variable de Gumbel ;
- si la corrélation est satisfaisante, calculer les paramètres d'ajustement de la droite de Gumbel. La droite de régression ou droite de Gumbel est :

$$P_{max,j} = \frac{1}{\alpha}\,y + \mathbf{x_o} \qquad (9.5)$$

où, $\frac{1}{\alpha}$ est la pente de la droite (Gradex) et $\mathbf{x_o}$ est l'ordonnée à l'origine (mode).

y est la variable de Gumbel pour une probabilité donnée. Les paramètres $\frac{1}{\alpha}$ et x_o sont déterminés par la méthode des moindres carrés.

NB: Il y a lieu de noter que plusieurs méthodes d'ajustement sont possibles et parmi les plus classiques, on peut citer celle des moments, celle du maximum de vraisemblance, celle des moyennes pondérées …… Ici, nous avons utilisé une méthode des moins classiques et celle des calculs des paramètres d'ajustement par la méthode des moindres carrés. Dans la pratique, les estimations sont très proches de celle des moments et les écarts sont quasi-négligeables en regard des sources d'incertitude.

- tracer la droite de régression sur papier Gumbel. Pour cela, il suffit de prendre 2 valeurs de probabilité pour lesquelles, il faut déterminer la variable ***y*** qu'il suffira de remplacer dans la droite de régression.

Ex:

F(x) = 0,50 on a y = - [ln - ln (0,50)] = + 0,36 (9.6)

F(x) = 0,80 on a y = - [ln - ln (0,80)] = + 1,49 (9.7)

En remplaçant, ces valeurs dans l'équation, nous retrouvons respectivement les précipitations de probabilité 50% et 80%.

La valeur extrême ou quantile peut être déterminée graphiquement sur papier Gumbel ou analytiquement en utilisant simplement la droite de régression ou droite de Gumbel.

1. **Ajustement des précipitations annuelles à la loi de Gumbel**

Les caractéristiques de la série pluviométrique initiale sont :

Moyenne = $\overline{P}_{max,j}$ = 39,52 mm

Ecart type = σ = 13,24 mm

Le tableau 9.2 résume les résultats et la représentation graphique est en figure 9.1.

Tableau 9.2. Calcul de la variable de Gumbel **y**

m	$P_{max,j}$	F(x)	y = - [ln - ln F(x)]	m	$P_{max,j}$	F(x)	y = - [ln - ln F(x)]
1	16,4	0,0078	-1,57940	33	36	0,5078	0,38913
2	18,6	0,0234	-1,32267	34	36,3	0,5234	0,43489
3	18,7	0,0391	-1,17637	35	37,5	0,5391	0,48139
4	20	0,0547	-1,06682	36	39	0,5547	0,52873
5	21	0,0703	-0,97637	37	39,3	0,5703	0,57702
6	22,8	0,0859	-0,89777	38	41,4	0,5859	0,62634
7	24,5	0,1016	-0,82728	39	41,8	0,6016	0,67683
8	25	0,1172	-0,76266	40	42,4	0,6172	0,72860
9	25,4	0,1328	-0,70251	41	42,7	0,6328	0,78180
10	25,8	0,1484	-0,64584	42	43	0,6484	0,83658
11	28,2	0,1641	-0,59195	43	43,3	0,6641	0,89311
12	28,5	0,1797	-0,54031	44	45,1	0,6797	0,95160
13	29,1	0,1953	-0,49051	45	45,3	0,6953	1,01227
14	29,5	0,2109	-0,44224	46	45,4	0,7109	1,07537
15	29,7	0,2266	-0,39524	47	48	0,7266	1,14121
16	30,2	0,2422	-0,34928	48	48,4	0,7422	1,21015
17	30,4	0,2578	-0,30419	49	49,7	0,7578	1,28259
18	31,4	0,2734	-0,25981	50	51,8	0,7734	1,35903
19	31,8	0,2891	-0,21601	51	51,9	0,7891	1,44008
20	32,3	0,3047	-0,17267	52	52	0,8047	1,52647
21	32,5	0,3203	-0,12967	53	52,5	0,8203	1,61914
22	32,5	0,3359	-0,08694	54	52,9	0,8359	1,71924
23	32,5	0,3516	-0,04437	55	54,2	0,8516	1,82833
24	33,7	0,3672	-0,00188	56	54,3	0,8672	1,94841
25	33,8	0,3828	0,04060	57	55	0,8828	2,08231
26	34	0,3984	0,08316	58	56,5	0,8984	2,23401
27	34,9	0,4141	0,12586	59	57	0,9141	2,40954
28	35	0,4297	0,16878	60	59,5	0,9297	2,61857
29	35,5	0,4453	0,21198	61	60	0,9453	2,87813
30	35,6	0,4609	0,25555	62	66,9	0,9609	3,22274
31	35,8	0,4766	0,29954	63	74	0,9766	3,74158
32	35,8	0,4922	0,34405	64	75,5	0,9922	4,84811

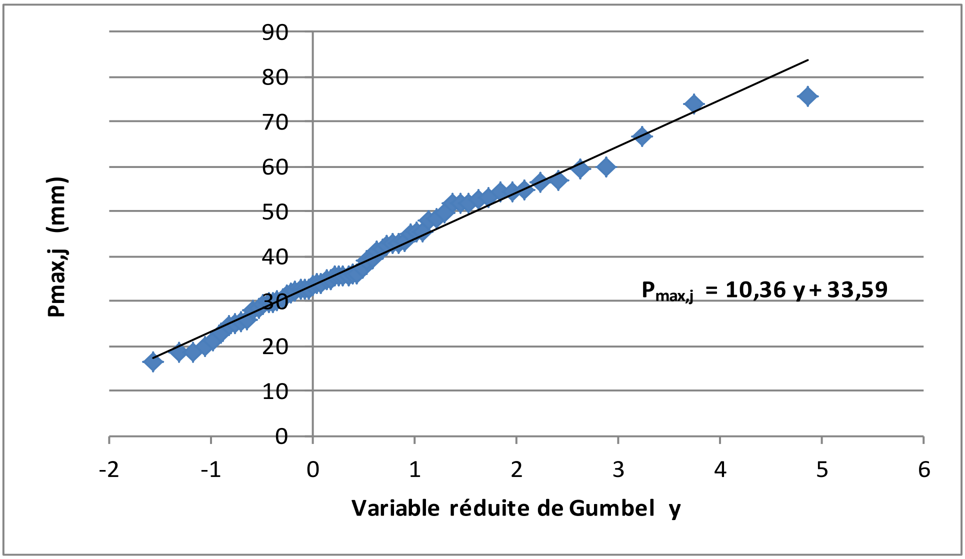

Fig.9.1. Ajustement à la loi de Gumbel

2. Calcul des quantiles

Une fois l'adéquation vérifiée, il faut procéder au calcul des quantiles en appliquant l'équation de la droite de Gumbel, soit :

$$\mathbf{P_{max,j,p\%} = 10,36\ y + 33,59} \qquad (9.8)$$

Pour T = 10 ans ; F(x) = 0,10 = 10% d'où y = - [ln - ln 0,90]= 2,25

Soit : $\mathbf{P_{max,j,10\%}}$ = (10.36 * 2,25) + 33.59 = **57**mm

Pour T = 50 ans ; F(x) = 0,02 = 2% d'où y = - [ln - ln 0,98]= 3,902

Soit : $\mathbf{P_{max,j,2\%}}$ = (10.36 * 3,902) + 33.59 = **74** mm

Pour T = 100ans ; F(x) = 0,01 = 1% d'où y = - [ln - ln 0,99]= 4,60

Soit : $\mathbf{P_{max,j,1\%}}$ = (10.36 * 4,60) + 33.59 = **81**mm

3. Intervalles de confiance

BERNIER et VERON ont étudié les intervalles de confiance de la loi de Gumbel. En toute rigueur, ces intervalles de confiance supposent un ajustement par la méthode des moments (pour le calcul du mode et du gradex). Pour un seuil α %, l'intervalle de confiance sur un quantile $x_{P\%}$ s'exprime en fonction de l'écart-type σ_X par l'expression 9.9.

$$\hat{x}_{p\%} - h_1\ \sigma_X \leq x_{P\%} < \hat{x}_{p\%} + h_2\ \sigma_X \qquad 9.9)$$

Où, h_1 et h_2 sont des paramètres dépendant de la taille n de l'échantillon de la fréquence (Probabilité) P et de la valeur de α.

• h_1 et h_2 seront évalués par la formule suivante (avec le signe + pour h_2 et le signe - pour h_1) :

$$h_{1,2} = \frac{\frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\sqrt{1+1.13y_{P\%}+1.1y_{p\%}^2} \pm \frac{u_\alpha^2}{n}(1.1y_{p\%}+0.57)}{1-1.1\frac{u_\alpha^2}{n}} \qquad (9.10)$$

• u_α est la variable réduite de Gauss correspondant à la fréquence au non-dépassement $1-\frac{1-\alpha}{2}$

• $y_{p\%}$ est la variable réduite de Gumbel correspondant à la fréquence au non-dépassement P%, ramenée à sa moyenne et à son écart-type :

$$y_{p\%} = \frac{-\mathrm{Ln}\left[-\mathrm{Ln}\left(F(x)\right)\right]-0.577}{1.28} \qquad (9.11)$$

Pour $\alpha = 5\%$ $\quad u_\alpha = 1{,}96$

$\hat{x}_{p\%} - h_1\,\sigma_x \le P_{max,j,p\%} < \hat{x}_{p\%} + h_2\,\sigma_X$

(9.12)

$P_{max,j,1,p\%} \le P_{max,j,p\%} < P_{max,j,2,p\%}$

σ_x : Ecart type de la variable à étudier, soit $\sigma_{Pmax,j} = 13{,}24$

Avec :

$P_{max,j,1,p\%} = P_{max,j,p\%} - h_1\,\sigma_{Pmax,j}$

$P_{max,j,2,p\%} = P_{max,j,p\%} + h_2\,\sigma_{Pmax,j}$

Le tableau 9.3 résume le calcul des intervalles de confiance.

Tableau 9.3. Calcul des intervalles de confiance

Période de retour (an)	1-F(x)	$y_{p\%}$	h_1	h_2	$P_{max,j,1,p\%}$ mm	$P_{max,j\ p\%}$ mm	$P_{max,j,2,p\%}$ mm
10	0,90	1,3073	0,418	0,677	51	57	71
50	0,98	2,5976	0,664	1,104	66	74	88
100	0,99	3,1430	0,810	1,250	71	81	98

On écrira :

$$\text{Prob}\ [P_{max,j\,,1,p\%} \leq P_{max,j\,,p\%} < P_{max,j\,,2,p\%}] = 1\text{-}0{,}05 = 0{,}95 = 95\%$$

F(x) =10% : Prob [51 ≤ 57 < 71] = 95%
F(x) =2% : Prob [66 ≤ 74 < 88] = 95%
F(x) =1% : Prob [71 ≤ 81 < 98] = 95%

Le même résultat peut être trouvé en utilisant Hydrolab donnant aussi les intervalles de confiance. Le calcul est résumé dans le tableau 9.3 et l'ajustement est donné en figure 9.2.

Tableau 9.3. Calculs de la variable réduite y de Gumbel

Mode=	33,56				I.C. %)=95	
Gradex=	10,33	F(x)	y	(64)	u Gauss=1,96	
$P_{max,j}$ classées	Ordre de classement	Fréquence expérimentale	Variable réduite	Valeur théorique	Borne inférieure	Borne supérieure
16,4	1	0,0078	-1,579	17,2551	10,99250856	21,3349465
18,6	2	0,0234	-1,323	19,90626	14,41488904	23,5901624
18,7	3	0,0391	-1,176	21,41698	16,34485774	24,895483
20	4	0,0547	-1,067	22,54831	17,77790325	25,8852311
21	5	0,0703	-0,976	23,48233	18,95168411	26,7116969
22,8	6	0,0859	-0,898	24,29397	19,9638359	27,4377217
24,5	7	0,1016	-0,827	25,02198	20,86473626	28,0958873
25	8	0,1172	-0,763	25,68921	21,68403993	28,7054869
25,4	9	0,1328	-0,703	26,31038	22,44079189	29,2790039
25,8	10	0,1484	-0,646	26,89559	23,1480097	29,8250512
28,2	11	0,1641	-0,592	27,45212	23,81501968	30,3498712
28,5	12	0,1797	-0,540	27,98539	24,44875552	30,8581697
29,1	13	0,1953	-0,491	28,49961	25,05452969	31,3536118
29,5	14	0,2109	-0,442	28,99808	25,63651649	31,8391318
29,7	15	0,2266	-0,395	29,48351	26,19806803	32,3171362
30,2	16	0,2422	-0,349	29,9581	26,74192839	32,7896408
30,4	17	0,2578	-0,304	30,42373	27,27038347	33,2583664
31,4	18	0,2734	-0,260	30,88201	27,78536859	33,7248079
31,8	19	0,2891	-0,216	31,33433	28,2885476	34,1902848
32,3	20	0,3047	-0,173	31,78191	28,78137229	34,6559788
32,5	21	0,3203	-0,130	32,22586	29,26512788	35,1229636
32,5	22	0,3359	-0,087	32,66718	29,74096831	35,5922279
32,5	23	0,3516	-0,044	33,10678	30,20994426	36,0646938
33,7	24	0,3672	-0,002	33,54554	30,67302551	36,5412326
33,8	25	0,3828	0,041	33,98426	31,13111922	37,0226777
34	26	0,3984	0,083	34,42372	31,58508499	37,5098365
34,9	27	0,4141	0,126	34,86468	32,0357475	38,0035011

35	28	0,4297	0,169	35,30787	32,48390738	38,5044576
35,5	29	0,4453	0,212	35,75403	32,9303506	39,0134965
35,6	30	0,4609	0,256	36,20391	33,37585701	39,5314212
35,8	31	0,4766	0,300	36,65824	33,8212081	40,0590584
35,8	32	0,4922	0,344	37,11782	34,2671945	40,5972676
36	33	0,5078	0,389	37,58342	34,71462332	41,1469516
36,3	34	0,5234	0,435	38,05589	35,16432564	41,7090682
37,5	35	0,5391	0,481	38,53611	35,61716446	42,2846427
39	36	0,5547	0,529	39,02502	36,07404329	42,8747815
39,3	37	0,5703	0,577	39,52362	36,53591573	43,4806884
41,4	38	0,5859	0,626	40,033	37,00379637	44,1036822
41,8	39	0,6016	0,677	40,55436	37,47877342	44,745218
42,4	40	0,6172	0,729	41,08899	37,96202353	45,406912
42,7	41	0,6328	0,782	41,63835	38,45482942	46,0905709
43	42	0,6484	0,837	42,20402	38,95860115	46,7982272
43,3	43	0,6641	0,893	42,78783	39,47490202	47,5321821
45,1	44	0,6797	0,952	43,39181	40,00548037	48,2950589
45,3	45	0,6953	1,012	44,01829	40,55230928	49,0898687
45,4	46	0,7109	1,075	44,66995	41,11763646	49,9200931
48	47	0,7266	1,141	45,34988	41,70404789	50,7897906
48,4	48	0,7422	1,210	46,06172	42,31455003	51,7037329
49,7	49	0,7578	1,283	46,80977	42,95267756	52,6675848
51,8	50	0,7734	1,359	47,59916	43,62263694	53,688143
51,9	51	0,7891	1,440	48,43611	44,32950116	54,7736609
52	52	0,8047	1,526	49,32828	45,07947931	55,9342986
52,5	53	0,8203	1,619	50,28519	45,88029865	57,1827606
52,9	54	0,8359	1,719	51,31899	46,74176054	58,5352241
54,2	55	0,8516	1,828	52,44543	47,67657514	60,0127345
54,3	56	0,8672	1,948	53,68553	48,70166178	61,6433783
55	57	0,8828	2,082	55,06819	49,8402661	63,4658255
56,5	58	0,8984	2,234	56,63478	51,12560038	65,5354198
57	59	0,9141	2,410	58,44745	52,60754644	67,9354007
59,5	60	0,9297	2,619	60,60604	54,36615249	70,7995089
60	61	0,9453	2,878	63,2864	56,5423446	74,3634528
66,9	62	0,9609	3,223	66,845	59,42156028	79,1051502
74	63	0,9766	3,742	72,20295	63,74088397	86,2601507
75,5	64	0,9922	4,848	83,62967	72,91324066	101,558683

NB : Il est à noter que le mode (*paramètre de position*) et le gradex (*paramètre de dispersion*) sont égaux à :

Gradex **G** = 0,78 σ et $\quad \mathbf{x_0} = \overline{X} - 0,577\ G \quad$ et $\quad \overline{X} = \overline{P}_{max,j}$

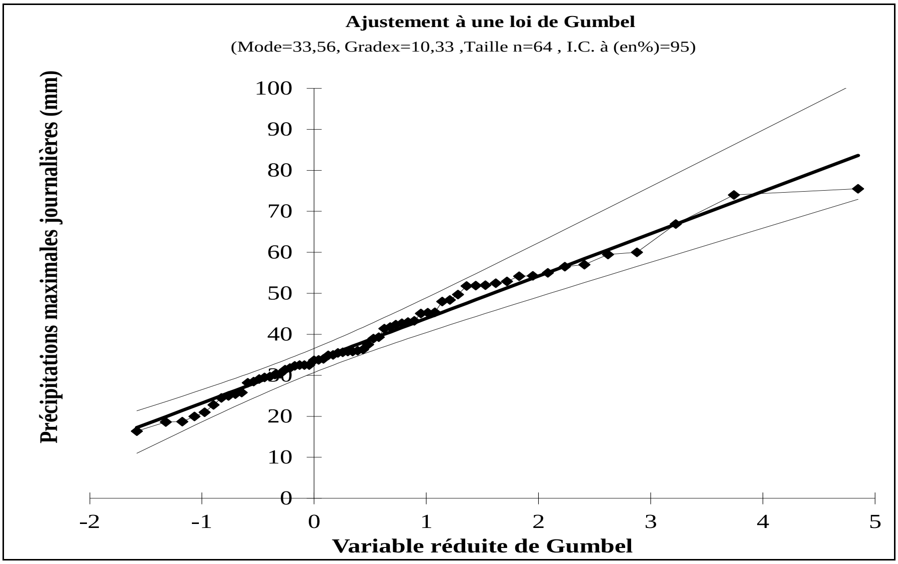

Fig.9.2. Ajustement à la loi de Gumbel (Hydrolab)

La droite de Gumbel est : $P_{max,j,p\%} = 10,33\ \mathbf{y} + 33,56$
Le mode et le gradex sont calculés par la méthode des moments

Les quantiles sont résumés dans le tableau 9.4.

Tableau 9.4. Quantiles (Hydrolab)

Période de retour an	Fréquence 1-F(x)	Variable réduite	$P_{max,j,p\%}$ mm	Borne inférieure	Borne supérieure
10	0,9	2,250	**56,8=57**	51,3	65,8
50	0,98	3,902	**73,9=74**	65,1	88,5
100	0,99	4,600	**81,1=81**	70,9	98,1

<u>On écrira</u> :

$Prob[P_{max,j,1,10\%} < P_{max,j,10\%} < P_{max,j,2,10\%}] = 1-\alpha = 95\%$

Soit : **Prob [51<57<66] =1-5% = 95%**

$Prob[P_{max,j,2\%} < P_{max,j,2\%} < P_{max,j,2,2\%}] = 1-\alpha = 95\%$

Soit : **Prob [65 <74 < 89] =1-5% = 95%**

$Prob[P_{max,j,1,1\%} < P_{max,j,1\%} < P_{max,j,2,1\%}] = 1-\alpha = 95\%$

Soit : **Prob [71<81<98] =1-5% = 95%**

&&&&&