

## Exercice 10

### AJUSTEMENT DES PLUIES MAXIMALES JOURNALIERES A LOI DES EXTRÊMES GENERALISEE (LOI GEV)

Soient les précipitations maximales journalières observées, sur une période de 76 années, à la station pluviométrique du bassin versant de l'Oued Béchar en zone aride ; il est demandé d'ajuster la série d'observations à la loi GEV et de déterminer les quantiles de périodes de retour 10, 50 et 100 ans

#### Données :

**Tableau 10.1.** Précipitations maximales journalières  $P_{\max,j}$  (mm)

Année	$P_{\max,j}$ (mm)	Année	$P_{\max,j}$ (mm)	Année	$P_{\max,j}$ (mm)	Année	$P_{\max,j}$ (mm)
1906/07	12	1933/34	7,5	1954/55	19,5	1975/76	18,1
1909/10	14	1934/35	20,2	1955/56	13,9	1976/77	19,6
1910/11	14	1935/36	12	1956/57	7,8	1977/78	13,7
1911/12	32,2	1936/37	29,6	1957/58	35,5	1978/79	40,7
1912/13	103,3	1937/38	16	1958/59	77,3	1979/80	24,5
1913/14	15,2	1939/40	5,6	1959/60	10,1	1980/81	8
1914/15	11,5	1940/41	47,4	1960/61	19,3	1981/82	13,5
1917/16	21,2	1941/42	20,6	1961/62	8,7	1983/84	1
1921/22	30,1	1942/43	36	1962/63	8,8	1984/85	16
1922/23	11	1943/44	13,8	1963/64	14,9	1985/86	24
1923/24	23,3	1945/46	16,5	1964/65	29,3	1986/87	11,1
1924/25	17	1946/47	6	1965/66	48,4	1990/91	23,4
1925/26	9,5	1947/48	13,4	1966/67	33,9	1991/92	6
1926/27	10	1948/49	26	1967/68	14,1	1992/93	14,7
1927/28	14,4	1949/50	32	1970/71	25,7	1993/94	57,3
1928/29	44	1950/51	34,5	1971/72	10,8	1997/98	5,4
1929/30	10,5	1951/52	24,4	1972/73	20,2	1999/00	16,7
1931/32	23,5	1952/53	7	1973/74	14,4	2000/01	4,5
1932/33	17	1953/54	15,5	1974/75	21,6	2001/02	6,3

## Corrigé :

### *Rappel :*

### **Loi des extrêmes généralisée (GEV ou loi de Jenkinson)**

La loi de Gumbel est très universellement utilisée pour caractériser la distribution de valeurs extrêmes. En fait, elle n'est qu'un des types de lois utilisables.

Jenkinson (1955) a montré que les lois de distribution des extrêmes pouvaient se mettre sous une forme unique :

$$F(x) = e^{-\left[1 - \frac{k(x-x_0)}{s}\right]^{1/k}} \quad (10.1)$$

Trois paramètres interviennent :  $x_0$  : paramètre de position

$s$  : paramètre d'échelle

$k$  : paramètre de forme.

Sous cette formulation unique, on retrouve les trois types de distribution selon les valeurs prise par  $k$  :

Si  $k$  est positif, on retrouve une loi proposée par Weibull (GEV de type III) où  $x$  est défini sur l'intervalle  $]-\infty, x_0[$ .

Cette borne supérieure de l'intervalle de définition se déduit des paramètres  $s$ ,  $k$  et  $x_0$  par la relation 10.2.

$$x_0' = \frac{s}{k} + x_0 \quad (10.2)$$

En fait, ce type de distribution se rencontre rarement en hydrologie où l'on travaille le plus souvent sur des valeurs maximales (pluies ou crue extrêmes).

- Si  $k$  est égal à zéro, on constate que  $\left[1 - \frac{k(x-x_0)}{s}\right]^{1/k} \rightarrow e^{-\frac{(x-x_0)}{s}}$ . On retrouve donc la loi de Gumbel (GEV de type I) et  $x$  est défini sur l'intervalle  $]-\infty, +\infty[$  ;
- Si  $k$  est négatif, on trouve une loi proposée par Frechet (GEV de type II) où  $x$  est défini sur l'intervalle  $]x_0', +\infty[$  Cette borne inférieure de l'intervalle de définition se déduit des paramètres  $s$ ,  $k$  et  $x_0$  par la relation :  $x_0' = \frac{s}{k} + x_0$ . Ce type de loi peut se rencontrer en hydrologie, mais la difficulté va résider dans l'estimation du paramètre de forme qui est très soumise aux aléas de l'échantillonnage.

La fonction de répartition de la loi GEV est définie selon l'expression 10.3.

$$F(x) = e^{-\left[1 - \frac{k(x-x_0)}{s}\right]^{1/k}}, \quad (10.3)$$

Sa densité de probabilité est :

$$f(x) = \frac{1}{s} \left[1 - \frac{k(x-x_0)}{s}\right]^{\frac{1}{k}-1} e^{-\left[1 - \frac{k(x-x_0)}{s}\right]^{1/k}} \quad (10.4)$$

### **Application de la loi GEV aux précipitations maximales journalières**

#### **Calcul des paramètres : $x_0$ , $s$ et $k$**

Ces paramètres  $x_0$ ,  $s$  et  $k$ , sont tributaires des trois premiers moments pondérés  $b_0$ ,  $b_1$  et  $b_2$  qu'il convient de calculer (expression 10.5).

On estimera tout d'abord les  $b_0$ ,  $b_1$  et  $b_2$  :

$$b_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad b_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{i-1}{n-1} x_i \quad \text{et} \quad b_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(i-1)(i-2)}{(n-1)(n-2)} x_i \quad (0.5)$$

( $n$  étant la taille de l'échantillon et  $i$  le rang dans l'échantillon classé par ordre croissant)

On peut montrer que ces trois premiers moments pondérés  $b_0$ ,  $b_1$  et  $b_2$ , sont liés au trois paramètres  $x_0$ ,  $s$  et  $k$  par les relations (10.6).

$$\frac{3b_2 - b_0}{2b_1 - b_0} = \frac{1-3^{-k}}{1-2^{-k}}, \quad b_0 = x_0 + \frac{s}{k} [1 - \Gamma(1+k)] \quad \text{et} \quad 2b_1 - b_0 = \frac{s}{k} \Gamma(1+k)(1-2^{-k}) \quad (10.6)$$

La fonction Gamma est telle que :  $\Gamma(1+k) = \int_0^{\infty} u^k e^{-u} du$  et on peut aisément

montrer que :  $\Gamma(1+k) = k \Gamma(k)$ .

**NB:** Pour obtenir la valeur de  $\Gamma(k+1)$  sur Excel, il suffit de faire appel à la fonction LnGAMMA() qui donne le log népérien d'une valeur puis d'en prendre l'exponentielle.

La première équation ne contient qu'une seule inconnue, le terme  $k$ , et on peut la résoudre par itérations successives.

Dans le cas général, où  $-0.5 < k < 0.5$  on peut évaluer  $k$  explicitement par la relation 10.7.

$$k = 7,8590c + 2,9554c^2 \quad \text{avec} \quad c = \frac{2b_1 - b_0}{3b_2 - b_0} - \frac{\text{Ln}(2)}{\text{Ln}(3)} \quad (10.7)$$

On en déduit immédiatement les valeurs de  $s$  et  $x_0$  par :

$$s = \frac{(2b_1 - b_0)k}{(1 - 2^{-k}) \Gamma(1+k)} \quad \text{et} \quad x_0 = b_0 + s \frac{\Gamma(1+k) - 1}{k} \quad (10.8)$$

### Représentation graphique

Si l'on reprend la fonction de distribution :  $F(x) = e^{-\left[1 - \frac{k(x-x_0)}{s}\right]^{1/k}}$ , on en déduit une représentation linéaire en fonction des points expérimentaux  $x_i$  et de leur fréquence expérimentale  $F(x_i)$  :

$$-\text{Ln}[F(x)] = \left[1 - \frac{k(x-x_0)}{s}\right]^{1/k} \quad (10.9)$$

Si  $k$  est positif, loi de Weibull

$$-\text{Ln}[F(x)] = \left[\frac{k}{s}\right]^{1/k} \left[\frac{s}{k} - x + x_0\right]^{1/k}$$

$$\text{Ln}\{-\text{Ln}[F(x)]\} = \frac{1}{k} \text{Ln}\left(\frac{k}{s}\right) + \frac{1}{k} \text{Ln}(x_0 - x)$$

$$-\text{Ln}(x_0 - x) = \text{Ln}\left(\frac{k}{s}\right) + k[-\text{Ln}\{-\text{Ln}(F(x))\}]$$

Si  $k$  est négatif, loi de Fréchet

$$-\text{Ln}[F(x)] = \left[-\frac{k}{s}\right]^{1/k} \left[x - x_0 + \frac{s}{k}\right]^{1/k}$$

$$\text{Ln}\{-\text{Ln}[F(x)]\} = \frac{1}{k} \text{Ln}\left(-\frac{k}{s}\right) + \frac{1}{k} \text{Ln}(x - x_0)$$

$$\text{Ln}(x - x_0) = -\text{Ln}\left(-\frac{k}{s}\right) - k[-\text{Ln}\{-\text{Ln}(F(x))\}]$$

### Revenons à l'exemple traité :

Les trois premiers moments pondérés  $b_0$ ,  $b_1$  et  $b_2$  sont calculés par l'expression 10.6.

$$b_0 = 20,74 ; \quad b_1 = 14,18 \quad \text{et} \quad b_2 = 11,18$$

De même, il faut calculer les 3 paramètres  $x_0$ ,  $s$  et  $k$  qui sont liés aux trois premiers :

$$x_0 = 13,3 ; \quad s = 7,89 \quad \text{et} \quad k = -0,276$$

### 1. Procédé d'Ajustement

- Classer les observations par ordre croissant en leur attribuant un numéro d'ordre **m**
- Calculer leur fréquence théorique par la formule de Hazen  $F(x) = (m - 0,5)/n$ , ( $m$  : numéro d'ordre et  $n$  : taille de la série)
- Calculer la variable réduite  $y = - [\ln - \ln F(x)]$
- Tracer la courbe théorique en portant en abscisse la variable  $y$  déjà calculée et en ordonnées les valeurs théoriques de  $x$  calculées par

$$\text{l'expression } x = x_o + \frac{S}{k} [1 - (-\ln F(x))^k].$$

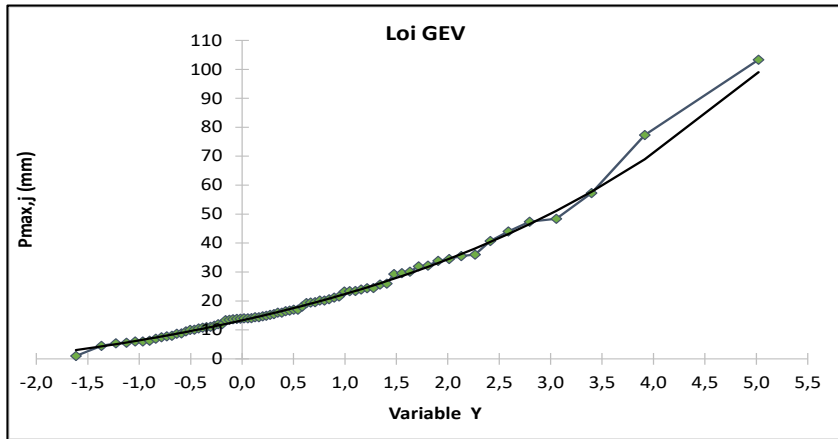
Le calcul est donné en tableau 10.2 et la représentation graphique est en figure 10.1.

**Tableau 10.2.** Calcul de la valeur théorique  $x$

Rang	Classée	$(m-0,5)/n$	Variable	Valeur théorique $x$
$m=i$	$P_{\max,j}$ (mm)	$F(x)$	$y = - [\ln - \ln F(x)]$	$x= x_o+(s/k).[1-(-\ln(F(x))^k]$
1	1,0	0,0066	-1,6142	3,02
2	4,5	0,0197	-1,3674	4,31
3	5,4	0,0329	-1,2280	5,08
4	5,6	0,0461	-1,1243	5,67
5	6,0	0,0592	-1,0391	6,17
6	6,0	0,0724	-0,9655	6,61
7	6,3	0,0855	-0,8997	7,01
8	7,0	0,0987	-0,8398	7,39
9	7,5	0,1118	-0,7842	7,74
10	7,8	0,1250	-0,7321	8,07
11	8,0	0,1382	-0,6828	8,39
12	8,7	0,1513	-0,6357	8,70
13	8,8	0,1645	-0,5906	9,00
14	9,5	0,1776	-0,5470	9,29
15	10,0	0,1908	-0,5048	9,58
16	10,1	0,2039	-0,4637	9,87
17	10,5	0,2171	-0,4235	10,15
18	10,8	0,2303	-0,3843	10,42
19	11,0	0,2434	-0,3457	10,70
20	11,1	0,2566	-0,3077	10,97
21	11,5	0,2697	-0,2703	11,25
22	12,0	0,2829	-0,2332	11,52
23	12,0	0,2961	-0,1966	11,79
24	13,4	0,3092	-0,1602	12,06
25	13,5	0,3224	-0,1240	12,34

26	13,7	0,3355	-0,0881	12,61
27	13,8	0,3487	-0,0522	12,89
28	13,9	0,3618	-0,0164	13,17
29	14,0	0,3750	0,0194	13,45
30	14,0	0,3882	0,0552	13,74
31	14,1	0,4013	0,0910	14,03
32	14,4	0,4145	0,1270	14,32
33	14,4	0,4276	0,1631	14,62
34	14,7	0,4408	0,1994	14,92
35	14,9	0,4539	0,2360	15,22
36	15,2	0,4671	0,2729	15,54
37	15,5	0,4803	0,3100	15,85
38	16,0	0,4934	0,3476	16,18
39	16,0	0,5066	0,3856	16,51
40	16,5	0,5197	0,4240	16,85
41	16,7	0,5329	0,4629	17,20
42	17,0	0,5461	0,5025	17,55
43	17,0	0,5592	0,5426	17,92
44	18,1	0,5724	0,5834	18,29
45	19,3	0,5855	0,6250	18,68
46	19,5	0,5987	0,6674	19,08
47	19,6	0,6118	0,7107	19,50
48	20,2	0,6250	0,7550	19,92
49	20,2	0,6382	0,8004	20,37
50	20,6	0,6513	0,8469	20,83
51	21,2	0,6645	0,8946	21,31
52	21,6	0,6776	0,9438	21,81
53	23,3	0,6908	0,9945	22,33
54	23,4	0,7039	1,0468	22,88
55	23,5	0,7171	1,1010	23,45
56	24,0	0,7303	1,1572	24,06
57	24,4	0,7434	1,2157	24,70
58	24,5	0,7566	1,2767	25,38
59	25,7	0,7697	1,3405	26,10
60	26,0	0,7829	1,4075	26,87
61	29,3	0,7961	1,4780	27,70
62	29,6	0,8092	1,5526	28,59
63	30,1	0,8224	1,6319	29,56
64	32,0	0,8355	1,7165	30,62
65	32,2	0,8487	1,8075	31,79
66	33,9	0,8618	1,9059	33,09
67	34,5	0,8750	2,0134	34,54

68	35,5	0,8882	2,1320	36,20
69	36,0	0,9013	2,2643	38,12
70	40,7	0,9145	2,4146	40,38
71	44,0	0,9276	2,5887	43,12
72	47,4	0,9408	2,7963	46,56
73	48,4	0,9539	3,0545	51,13
74	57,3	0,9671	3,3978	57,73
75	77,3	0,9803	3,9153	68,95
76	103,3	0,9934	5,0206	98,99



**Fig.10. 1.** Ajustement à la loi de GEV

## 2. Calcul des quantiles : 10, 50 et 100 ans

Pour le calcul des quantiles, il suffit d'appliquer la formule

$$x = x_0 + \frac{S}{k} [1 - (-\ln F(x))^k]$$

pour chaque période de retour (Tableau 10. 3).

**Tableau 10.3.** Quantiles

Période de retour (an)	Fréquence %	Fréquence de calcul %	$P_{\max,j,p\%}$ mm
10	10	0,90	38
50	2	0,98	69
100	1	0,99	86

### 3. Calcul des intervalles de confiance

Le calcul des quantiles est beaucoup plus complexe.

On peut passer par la loi de Gumbel en travaillant sur les valeurs transformées (et non initiales) pour déterminer les bornes inférieure et supérieure de chaque quantile. Ces valeurs transformées  $x'$  nécessitent le calcul de la borne minimale  $x'_0$  au début du calcul de l'intervalle de

$$\text{confiance, à savoir : } x'_0 = \frac{S}{k} + x_0 = -15,49 \quad (10.10)$$

Ainsi, il faut refaire l'ajustement en transformant les valeurs initiales  $x$  en  $x' = \log(x - x'_0)$  et ajuster la nouvelle série à la loi de Gumbel et d'en déduire les quantiles (voir exercice 9).

Les caractéristiques de la série transformée  $x'$  sont :

$$\text{Moyenne des } \log(x - x'_0) = 3,519$$

$$\text{Ecart type des } \log(x - x'_0) = \sigma_{\log(x - x'_0)} = 0,355$$

**Tableau 10.4.** Calcul des intervalles de confiance

Période de retour (an)	1-F(x)	$y_{p\%}$	$h_1$	$h_2$	$x'_{p\%}$	$P_{\max,j,p\%}$ mm	$x'_{1,p\%}$	$P_{\max,j,1,p\%}$ mm	$x'_{2,p\%}$	$P_{\max,j,2,p\%}$ mm
10	0,90	1,3073	0,389	0,604	3,99	38	3,85	31	4,20	51
50	0,98	2,5976	0,619	0,986	4,45	69	4,23	53	4,79	106
100	0,99	3,1430	0,761	1,164	4,64	86	4,38	64	5,02	136

$$y_{p\%} := \frac{-\text{Ln}[-\text{Ln}(F(x))] - 0.577}{1.28} : \text{variable réduite théorique}$$

$$h_{1,2} = \frac{\frac{u_\alpha}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + 1.13y_{p\%} + 1.1y_{p\%}^2} \pm \frac{u_\alpha^2}{n} (1.1y_{p\%} + 0.57)}{1 - 1.1 \frac{u_\alpha^2}{n}}$$

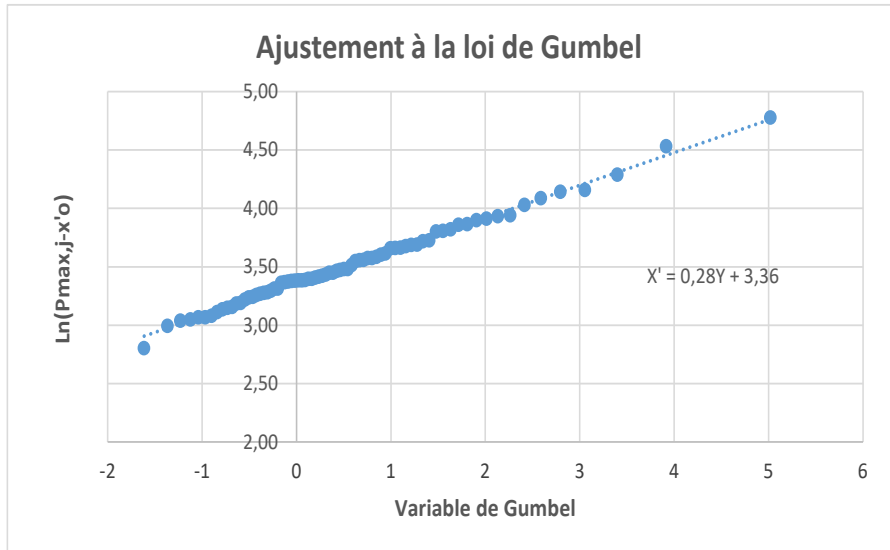
Les intervalles de confiance sont :

$$\hat{x}'_{p\%} - h_1 \sigma_{\log(x - x'_0)} \leq x'_{p\%} < \hat{x}'_{p\%} + h_2 \sigma_{\log(x - x'_0)}$$

$x'_{p\%}$  est le quantile correspondant à une fréquence donnée ; il est calculé après avoir ajusté la variable initiale transformée, à la loi de Gumbel (Fig. 10.2).



La droite d'ajustement de la loi de Gumbel est :  $x' = 0,28 y + 3,36$



**Fig.10.2.** Ajustement à la loi de Gumbel de la variable transformée

Le passage de la variable transformée  $x'$  à la variable initiale  $x$ , c'est-à-dire de  $x'_{1, p\%}$  à  $P_{\max,j,1,p\%}$  ou bien  $x'_{2, p\%}$  à  $P_{\max,j, p\%}$  se fait via l'exponentiel de la variable transformée, soit :

$P_{\max,j,1,p\%} = \exp ( x'_{1, p\%} ) + x'_0$  , correspondant à la borne inférieure du quantile pour une période de retour donnée

$P_{\max,j,2,p\%} = \exp ( x'_{2, p\%} ) + x'_0$  , correspondant à la borne supérieure du quantile pour une période de retour donnée .

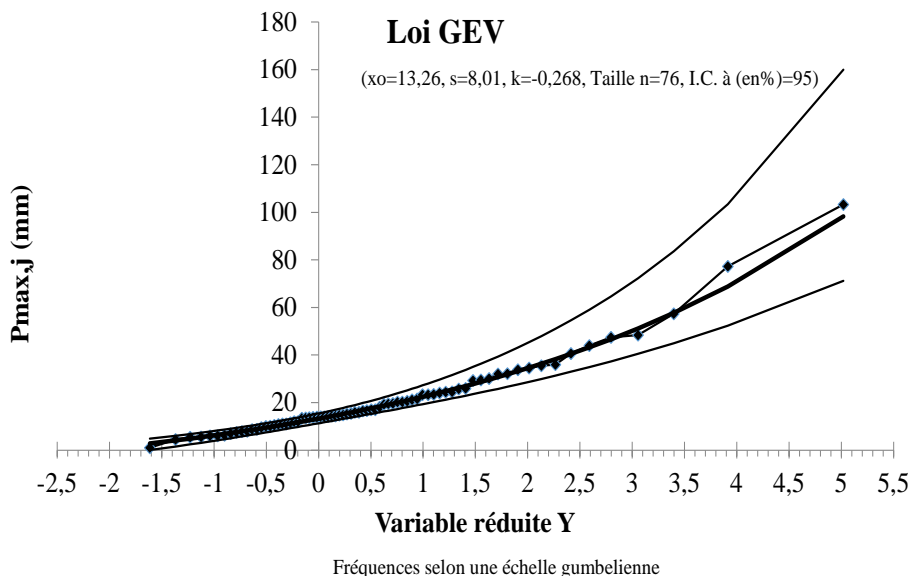
Pratiquement, le même résultat peut être trouvé en utilisant Hydrolab2010 donnant aussi les intervalles de confiance. Le calcul est résumé dans le tableau 10.5 et l'ajustement est donné en figure 10.3.

**Tableau 10.5.** Ajustement et calcul (Hydrolab)

$x_0 = 13,3$		$k = -0,2682$		$n = 76$	$IC = 95\%$		
$s = 8,0$						$u_{\text{Gauss}} = 1,960$	
$P_{\text{max},j}$ classées	Ordre de classement	Fréquence expérimentale	Variable réduite	Valeur théorique	Borne inférieure	Borne supérieure	
1,0	1	0,0066	-1,614	2,8	0,1	4,8	
4,5	2	0,0197	-1,367	4,1	1,5	6,0	
5,4	3	0,0329	-1,228	4,9	2,4	6,8	
5,6	4	0,0461	-1,124	5,5	3,1	7,4	
6,0	5	0,0592	-1,039	6,0	3,6	7,9	
6,0	6	0,0724	-0,965	6,4	4,1	8,3	
6,3	7	0,0855	-0,900	6,9	4,6	8,7	
7,0	8	0,0987	-0,840	7,2	5,0	9,1	
7,5	9	0,1118	-0,784	7,6	5,4	9,4	
7,8	10	0,1250	-0,732	7,9	5,8	9,7	
8,0	11	0,1382	-0,683	8,3	6,1	10,1	
8,7	12	0,1513	-0,636	8,6	6,5	10,4	
8,8	13	0,1645	-0,591	8,9	6,8	10,7	
9,5	14	0,1776	-0,547	9,2	7,1	11,0	
10,0	15	0,1908	-0,505	9,5	7,4	11,3	
10,1	16	0,2039	-0,464	9,8	7,7	11,6	
10,5	17	0,2171	-0,424	10,0	8,0	11,9	
10,8	18	0,2303	-0,384	10,3	8,3	12,2	
11,0	19	0,2434	-0,346	10,6	8,6	12,5	
11,1	20	0,2566	-0,308	10,9	8,9	12,8	
11,5	21	0,2697	-0,270	11,2	9,2	13,1	
12,0	22	0,2829	-0,233	11,4	9,5	13,4	
12,0	23	0,2961	-0,197	11,7	9,8	13,7	
13,4	24	0,3092	-0,160	12,0	10,1	14,0	
13,5	25	0,3224	-0,124	12,3	10,3	14,3	
13,7	26	0,3355	-0,088	12,6	10,6	14,6	
13,8	27	0,3487	-0,052	12,8	10,9	15,0	
13,9	28	0,3618	-0,016	13,1	11,2	15,3	
14,0	29	0,3750	0,019	13,4	11,4	15,6	
14,0	30	0,3882	0,055	13,7	11,7	16,0	
14,1	31	0,4013	0,091	14,0	12,0	16,3	
14,4	32	0,4145	0,127	14,3	12,3	16,7	
14,4	33	0,4276	0,163	14,6	12,6	17,0	
14,7	34	0,4408	0,199	14,9	12,9	17,4	
14,9	35	0,4539	0,236	15,2	13,1	17,8	
15,2	36	0,4671	0,273	15,5	13,4	18,2	
15,5	37	0,4803	0,310	15,8	13,7	18,6	

16,0	38	0,4934	0,348	16,2	14,0	19,0
16,0	39	0,5066	0,386	16,5	14,3	19,4
16,5	40	0,5197	0,424	16,9	14,6	19,8
16,7	41	0,5329	0,463	17,2	14,9	20,3
17,0	42	0,5461	0,502	17,6	15,3	20,7
17,0	43	0,5592	0,543	17,9	15,6	21,2
18,1	44	0,5724	0,583	18,3	15,9	21,7
19,3	45	0,5855	0,625	18,7	16,2	22,2
19,5	46	0,5987	0,667	19,1	16,6	22,8
19,6	47	0,6118	0,711	19,5	16,9	23,3
20,2	48	0,6250	0,755	20,0	17,3	23,9
20,2	49	0,6382	0,800	20,4	17,7	24,5
20,6	50	0,6513	0,847	20,9	18,1	25,1
21,2	51	0,6645	0,895	21,4	18,5	25,8
21,6	52	0,6776	0,944	21,9	18,9	26,5
23,3	53	0,6908	0,994	22,4	19,3	27,2
23,4	54	0,7039	1,047	22,9	19,7	28,0
23,5	55	0,7171	1,101	23,5	20,2	28,8
24,0	56	0,7303	1,157	24,1	20,7	29,7
24,4	57	0,7434	1,216	24,8	21,2	30,6
24,5	58	0,7566	1,277	25,5	21,7	31,6
25,7	59	0,7697	1,341	26,2	22,3	32,6
26,0	60	0,7829	1,407	27,0	22,9	33,8
29,3	61	0,7961	1,478	27,8	23,5	35,0
29,6	62	0,8092	1,553	28,7	24,2	36,3
30,1	63	0,8224	1,632	29,7	25,0	37,8
32,0	64	0,8355	1,717	30,7	25,8	39,4
32,2	65	0,8487	1,807	31,9	26,7	41,1
33,9	66	0,8618	1,906	33,2	27,6	43,1
34,5	67	0,8750	2,013	34,7	28,7	45,4
35,5	68	0,8882	2,132	36,3	29,9	47,9
36,0	69	0,9013	2,264	38,2	31,3	51,0
40,7	70	0,9145	2,415	40,5	33,0	54,6
44,0	71	0,9276	2,589	43,2	34,9	59,0
47,4	72	0,9408	2,796	46,6	37,3	64,6
48,4	73	0,9539	3,054	51,2	40,5	72,3
57,3	74	0,9671	3,398	57,7	45,0	83,6
77,3	75	0,9803	3,915	68,8	52,4	103,4
103,3	76	0,9934	5,021	98,3	71,2	159,9

La représentation graphique est donnée en figure 10.3 et les quantiles sont donnés dans le tableau 10.6.



**Fig.10.3.** Ajustement à la loi GEV (HydroLab)

**Tableau 10.6.** Quantiles et intervalles de confiance (HydroLab2016)

Période de Retour (an)	Fréquence	Variable réduite	Valeur théorique $P_{\max,j,p\%}$	Borne inférieure	Borne supérieure
10	0,90	2,25	38,02=38	31,17=31	50,64=51
50	0,98	3,90	68,48=68	52,17=52	102,81=103
100	0,99	4,60	86,01=86	63,53=64	135,80=136

**On écrira :**

$$\text{Prob}[P_{\max,j,1,10\%} < P_{\max,j,10\%} < P_{\max,j,2,10\%}] = 1 - \alpha = 95\%$$

$$\text{Soit } \text{Prob}[31\text{mm} < 38\text{mm} < 51\text{mm}] = 1 - 5\% = 95\%$$

$$\text{Prob}[P_{\max,j,1,2\%} < P_{\max,j,2\%} < P_{\max,j,2,2\%}] = 1 - \alpha = 95\%$$

$$\text{Soit } \text{Prob}[52\text{mm} < 81\text{mm} < 103\text{mm}] = 1 - 5\% = 95\%$$

$$\text{Prob}[P_{\max,j,1\%} < P_{\max,j,1\%} < P_{\max,j,2,1\%}] = 1 - \alpha = 95\%$$

$$\text{Soit } \text{Prob}[64\text{mm} < 86\text{mm} < 136\text{mm}] = 1 - 5\% = 95\%$$

**&&&&&**